2º Teste (ímpares) Ensaio de hipóteses 02/10/2020

Questão aberta:

1. Um hipermercado recebeu um lote de pacotes de cereais de um novo fornecedor que garante que a quantidade média de gordura contida num pacote não ultrapassa 8 gramas. Para apresentar uma eventual reclamação ao fornecedor, o técnico do departamento de vendas recolheu uma amostra aleatória de 25 pacotes de cereais, tendo obtido uma quantidade média de gordura de 8.3 gramas. Admita que a quantidade de gordura contida num pacote de cereais do novo fornecedor segue uma distribuição normal de variância igual a 0.64.

   a. Com base num teste adequado ao nível de 1% diga se acha necessário reclamar. [20 pontos]

   $X - Quantidade\ de\ gordura\ num\ pacote \sim N(\mu, 0.64)$

   $H_0: \mu \leq 8 \quad contra \quad H_1: \mu > 8 \quad \alpha = 0.01$

   Estatística teste: $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

   $$W = \{\bar{x}: \bar{x} > k\} \quad com\ k: P(\bar{X} > k | H_0) = 0.01$$

   $$k = invnorm\left(0.99, 8, \sqrt{\frac{0.64}{25}}\right) = 8.3722$$

   Como $\bar{x} = 8.3 \notin W$, não se rejeita H_0 pelo que não há razão para reclamar

   Ou

   $$W = \{z: z > k\} \quad com\ k: P(Z > k | H_0) = 0.01 \Rightarrow k = 2.3264$$

   $$k = invnorm(0.99, 0,1) = 2.3264$$

   Como $z = 1.875 \notin W$, não se rejeita H_0 pelo que não há razão para reclamar

   Ou valor-p$= P(\bar{X} > 8.3 | \mu = 8) = 1 - P(\bar{X} \leq 8.3 | \mu = 8) = 0.03 > 0.01$

   $= P(Z > 1.875) = 1 - P(Z \leq 1.875) = 0.03 > 0.01$(10)

   b. Qual a potência do ensaio se a verdadeira quantidade média de gordura for de 9grs ou 15 grs? Comente os resultados obtidos [10 pontos].

   $$\beta(9) = P(\bar{X} \in W | H_1) = P(\bar{X} > 8.372 | \mu = 9) \approx 0.999956$$

   $$\beta(10) = P(\bar{X} \in W | H_1) = P(\bar{X} > 8.372 | \mu = 10) = 1$$

   A potência do ensaio aumenta quando o verdadeiro valor da média se afasta de H_0, no sentido da alternativa o que significa que, com este ensaio, a probabilidade de não cometermos um erros de 2ª espécie aumenta quando o valor da verdadeira média da população se afasta da postulada em H_0.

2. Considere uma população de Poisson da qual se selecionou uma amostra casual com 3 observações. Para testar $H_0: \lambda = 2 \; contra \; H_1: \lambda = 3$ construiram-se os seguintes testes alternativos:

   i) Rejeitar H_0 quando $\sum_{i=1}^{3} x_i = 3$ e *ii)* Rejeitar H_0 quando $\sum_{i=1}^{3} x_i = 5$

   Determine a dimensão do ensaio e a probabilidade de erro de 2ª espécie e diga qual o teste que considera mais adequado e porquê.[20 pontos]

$$\alpha_{i)} = P(Rej. H_0 | H_0 \; verd.) = P\left(\sum_{i=1}^{3} X_i = 3 \,|\lambda = 2\right) = Poisson.dist(3, 2, false)$$

$$= 0.0892$$

$$1 - \beta_{i)} = P(Não \; rej. H_0 | H_0 \; falsa\,) = P\left(\sum_{i=1}^{3} X_i \neq 3 \,|\lambda = 3\,\right)$$

$$= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{3} X_i = 3 \,|\lambda = 3\,\right) = 1 - Poisson.dist(3, 3, false)$$

$$= 1 - 0.015 = 0.985$$

$$\alpha_{ii)} = P(Rej. H_0 | H_0 \; verd.) = P\left(\sum_{i=1}^{3} X_i = 5 \,|\lambda = 2\right) = Poisson.dist(5, 6, false)$$

$$= 0.1606$$

$$1 - \beta_{ii)} = P(Não \; rej. H_0 | H_0 \; falsa\,) = P\left(\sum_{i=1}^{3} X_i \neq 5 \,|\lambda = 3\right)$$

$$= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{3} X_i = 5 \,|\lambda = 3\,\right) = 1 - Poisson.dist(3, 3, false)$$

$$= 1 - 0.0607 = 0.9393$$

O 1º teste é o mais adequado pois dá um menor erro de 1ª espécie que é o mais importante porque é aquele que de acordo com o Lema Neuman-Pearson, podemos controlar fixando-o no nível desejado